SERII FOURIER

Sensul vieţii se înrudeşte
Cu convergenţa seriei.

Pornind de la discuţia asupra coardei vibrante începută în anii 1750 între Euler şi d'Alambert, se ajunge la ideea lui D. Bernoulli de a reprezenta o curbă definită pe intervalul $[0,2\pi]$ printr-o serie de sinusuri şi cosinusuri. Prin 1805 Fourier propune formulele pentru coeficienţii acestei serii. Descoperirea lui Fourier produce un efect extraordinar şi de-a lungul secolului al XIX-lea, este considerată ca una din cele mai importante teoreme ale analizei. Convergenţa seriei Fourier nu a putut fi demonstrată decât prin 1829 de către Dirichlet, utilizând funcţia monotonă pe porţiuni introdusă în 1821 de către Cauchy.
Polinoamele lui Legendre sunt introduse de Legendre prin 1785 pentru rezolvarea ecuaţiei lui Laplace în coordonate sferice. Prin lucrările lui D. Hilbert (1906-1911), este posibilă generalizarea teoriei dezvoltărilor ortogonale.

1. Sisteme ortogonale şi coeficienţii corespunzători

1.1. Studiul sistemelor de funcţii

(T): $\left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\right\}$

(E): $\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in Z}$

pe intervalul $[-\pi;\pi]$.

Sistemul (T) îl vom numi sistem trigonometric, iar sistemul (E) sistem exponenţial.

Definiţie. Dat sistemul de funcţii $\{F = f_k\}\ k \in N,$ definit pe intervalul $[\alpha, \beta]$ spunem că este sistem ortogonal dacă produsul scalar $(f_m, f_n) = 0$ pentru $m \neq n,$ deci $\int_\alpha^\beta f_m f_n = 0$ pentru $m \neq n,$ dacă F este sistemul real, respectiv $\int_\alpha^\beta f_m \bar{f}_n = 0$ pentru $m \neq n,$ în caz complex.

Lema 1:

$$\int_\pi^\pi \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad m \neq n \\ \pi & \text{pentru} \quad m = n \neq 0 \\ 2\pi & \text{pentru} \quad m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_\pi^\pi \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad m \neq n \\ \pi & \text{pentru} \quad m = n \neq 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_\pi^\pi \cos mx \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^\pi e^{(m-n)ix} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases}$$

Consecinţă: Sistemele (T) şi (E) sunt sisteme ortogonale pe $[-\pi, \pi]$.

1.2. În continuare facem referiri la (2) şi (5) din paragraful precedent (utilizând sistemele (T) şi (E)).

Teorema 1. Dacă f are exprimarea (2) sau (5) pe un interval de lungime 2π al axei reale (de exemplu pe $[-\pi, \pi]$ atunci:

$$a_k = \frac{1}{k}\int_{-\pi}^\pi f(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{k}\int_{-\pi}^\pi f(x)\sin kx dx, \tag{1}$$

respectiv

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx \qquad (2)$$

Demonstraţie. Înmulţind "exprimarea" (2) respective (5) cu cosmx şi sinmx, respectiv e^{-imx} şi integrând de la $-\pi$ la π obţinem conform lemei formulele (1) şi (2).

Remarcă: Exprimările (2) sau (5) pot avea loc înţelegând diferite tipuri de convergenţă: punctuală, uniformă sau în diferite norme cu care dotăm spaţiile funcţionale în care studiem seriile trigonometrice.

Vom spune că avem o exprimare uniformă dacă avem o convergenţă uniformă. În teorema anterioară este vorba de exprimare uniformă. În acest caz " sunt premise" toate operaţiile care apar în demonstraţie (cum ar fi integrarea termen cu termen a unei serii uniform convergente).

1.3. Exprimări pe $[0,\pi]$. Sistemele (C) şi (S) şi coeficienţii corespunzători

Lema 2. Pe intervalul $[0,\pi]$ sistemele de funcţii:

(C) 1, cosx, cos2x,…,cosnx,…

(S) sinx, sin2x, … , sinnx, …

sunt ortogonale.

Demonstraţie:

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$$

pentru $m \neq n$.

Teorema 2. Dacă pe $[0,\pi]$:

(a) f are exprimarea uniformă $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ atunci $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx$,

(b) dacă f are exprimarea $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ atunci $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$.

Observaţie: Teorema 2 poate fi completată cu următorul rezultat: f se poate prelungi pe toată axa reală până la o funcţie periodică de perioadă 2π, pară încât

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

în cazul (a) şi la o funcţie impară în cazul (b) cu exprimarea corespunzătoare.

Într-adevăr, definind

$$\tilde{f}_p(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \quad x \in [0, \pi] \\ f(-x) & \text{dacă} \quad x \in [-\pi, 0) \end{cases} \tag{3}$$

$\tilde{f}_p / [0, \pi] = f$ şi $\tilde{f}_p$ este pară.

Definind

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dacă} \quad x \in [0, \pi] \\ -f(-x) & \text{dacă} \quad x \in [-\pi, 0) \end{cases} \tag{4}$$

$\tilde{f}_i / [0, \pi] = f$ şi $\tilde{f}_i$ este impară.

Prelungirea la toată axa se face prin periodicitate. În plus, funcţiile construite prin (3) şi (4) le vom nota tot cu f în loc de f_p şi f_i, fără a crea confuzii.

1.4. Un criteriu de convergenţă uniformă

Teorema. Dacă seria $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|)$ este convergentă, atunci

$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ este absolut şi uniform convergentă pe R spre o funcţie continuă de perioadă 2π.

Demonstraţie: Ţinem cont de inegalitatea,

$$\left|a_k \cos kx + b_k \sin kx\right| \le \left|a_k\right| + \left|b_k\right|$$

şi teorema lui Weierstrass. Periodicitatea funcţiei sumă rezultă din periodicitatea termenilor.

2. Serii trigonometrice Fourier

2.1. Seria corespunzătoare lui f de perioadă T

Definiţie. Coeficienţii a_k şi b_k definiţi în teorema 1 se numesc coeficienţii Fourier reali ai funcţiei f, iar seria corespunzătoare, seria trigonometrică Fourier. Analog, coeficienţii c_k se numesc coeficienţii Fourier complecşi iar seria corespunzătoare, seria Fourier complexă a funcţiei f.

Dacă f este o funcţie de perioadă 2π în formulele de definire ale lui a_k şi b_k, respectiv c_k, putem înlocui intervalul de integrare $(-\pi, \pi)$ cu $(\alpha, \alpha+2\pi)$, α fiind număr real oarecare.

Faptul că ataşăm funcţiei f seria sa trigonometrică Fourier îl vom nota

$$f(x) \to \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{5}$$

sau pe scurt $f \sim (a_k, b_k)$ în cazul real şi sistemul (T), respectiv

$$f(x) \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{6}$$

sau f(c_k) în cazul complex cu sistemul (E).

Mai general, dacă f este de perioadă T atunci funcţiei f i se poate asocia seria trigonometrică Fourier

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

unde

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos k\omega x dx$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\sin k\omega x dx \qquad (7)$$

Prin urmare, în acest caz folosim sistemul trigonometric $(T_\omega): \frac{1}{2}, \cos\omega x, \sin\omega x, ..., \cos n\omega k, \sin n\omega x, ...$ care este ortogonal pe orice interval de forma $[\alpha, \alpha+T]$, unde pulsaţia $\omega = 2\pi / T$. In mod analog, folosind sistemul exponenţial $(E_\omega): \{e^{ik\omega x}\} k \in Z$ putem ataşa seria sa trigonometrică

$$f(x) \to \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

unde $c_k = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-ik\omega x} dx$

Când vrem să punem în evidenţă funcţia pentru care calculăm coeficienţii Fourier, notăm $a_k(f), b_k(f), c_k(f)$.

2.2. Liniaritatea coeficienţilor ca funcţionale. Exprimări particulare ale coeficienţilor

În cele ce urmează vom prezenta câteva priorităţi ale coeficienţilor Fourier.

Propoziţia 1. Coeficienţii a_k, b_k şi c_k sunt funcţionale liniare, adică $a_k(\alpha f + \beta g) = \alpha a_k(f) + \beta a_k(g)$ şi analoagele

Demonstraţie: se utilizează liniaritatea integralei definite. Proprietatea următoare se referă la cazurile particulare când f este pară, respective impară.

Propoziţia 2. (i) Dacă f este pară de perioadă T atunci

$$a_k(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos k\omega x dx,\ b_k(f) = 0 \tag{9}$$

(ii) Dacă f este impară de perioadă T atunci

$$a_k(f) = 0,\ b_k(f) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin k\omega x dx \tag{10}$$

Demonstraţie: Luăm $\alpha = -T/2$ şi din (7) deducem (9) şi (10) ţinând cont că integrala definită pe un interval simetric dintr-o funcţie impară este nulă şi dintr-o funcţie pară este de două ori integrala pe jumătatea pozitivă a intervalului. Prezentăm alte proprietăţi în paragraful seriilor Fourier în spaţii Hilbert.

3. Aplicaţii

1. Fie $f : R \to R,$ periodică de perioadă $T = 2\pi,\ f(x) = x^2$ pentru $-\pi \le x \le \pi.$ Scrieţi seria Fourier corespunzătoare.

Soluţie. F fiind pară, conform formulelor (9) avem:

$$a_k F) = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x^2 \cos k\omega x dx = \left(\omega = 2\pi / T = 1\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{k}\sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin kx dx\right) =$$
$$= \frac{4}{k\pi} - \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{4}{k\pi}\left(-\frac{x}{k}\cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \cos kx dx\right) =$$
$$= \frac{4}{k^2}\cos k\pi = (-1)^k \frac{4}{k^2},\ \ b_k = 0.$$

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

Deci

$$f(x) \to \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}$$

2. Fie $f:[0,\pi] \to R$, $f(x) = x$. Să se prelungească f până la o funcţie periodică, pară, de perioadă $T = 2\pi$ şi apoi să se dezvolte în serie Fourier trigonometrică.

Soluţie: Conform formulelor (3) putem prelungi f prin paritate la

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pentru} \quad x \in [0,\pi] \\ f(-x) & \text{pentru} \quad x \in [-\pi,0] \end{cases}$$

şi pe R prin periodicitate.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos kx dx = \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) \quad \text{şi} \quad b_k = 0.$$

Deci $a_{2n} = 0,\ a_{2n\text{-}1} = \dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2}$, $n \geq 1$ şi $f(x) \to \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

Şapte aplicaţii Fourier

1. Se dă funcţia $f: R \to R$ prin $f(x) = x\cos x$

a) Să se determine seria Fourier asociată acestei funcţii pe intervalul $[0,\pi]$.

b) Să se determine seria Fourier numai de cosinusuri asociată funcţiei pe $[0,\pi]$.

Soluţie

Funcţia f este continuă pe R, este integrabilă pe orice interval compact, deci problema determinării seriei Fourier asociate ei pe un anumit interval are sens.

a) Lungimea intervalului este $2l = \pi$. În acest caz formulele generale care ne dau coeficienţii sunt:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\cos 2nx\, dx = -\frac{4(4n^2+1)}{\pi(4n^2-1)^2},\ a_0 = \frac{4}{\pi},$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\sin 2nx\ dx = \frac{8n}{4n^2-1},\ n\in N$$

Rezultă că seria Fourier asociată funcţiei f pe intervalul $[0,\pi]$ este:

$$-\frac{2}{\pi}+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4n^2+1}{\pi(4n^2-1)^2}\cos 2nx+\frac{2n}{4n^2-1}\sin 2nx\right)$$

b) Pentru determinarea coeficienţilor Fourier ai seriei numai de cosinusuri asociată funcţiei f pe $[0,\pi]$ avem $l=\pi$, $b_n = 0$ şi

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]dx =$$
$$=\begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad n = 2m+1 \\ -\frac{4}{\pi}\frac{n^2+1}{(n^2-1)^2} & \text{dacă} \quad n = 2m,\ a_1 = \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

deci seria cerută este:

$$-\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}\cos x-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{\left(4n^2-1\right)^2}\cos 2nx$$

2. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f: R \to R$

$$f(x)=\begin{cases}\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|, & x\neq 2k\pi\\ 0, & x=2k\pi, k\in Z\end{cases}$$

Soluţie

Funcţia f este o funcţie periodică de perioadă de perioadă 2π şi pară, deci este suficient să studiem problema numai pe $[0,\pi]$. Funcţia este nemărginită pe acest interval, deci va trebui să arătăm că este absolut integrabilă în sens propriu pe $[0,\pi]$. Dar f este integrabilă Riemann pe orice interval $[x,\pi]\subset[0,\pi]$ deoarece este continuă.

Apoi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}\,|f(x)|=-\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}}=0,$$

deci în baza criteriului comparaţiei rezultă că f este absolut integrabilă pe $[0,\pi]$, deci putem determina coeficienţii Fourier.

Funcţia f verifică condiţiile din criteriul lui Lipschitz, deci seria Fourier asociată converge în x_0 către $f(x_0)$, unde $x_0\in(0,\pi]$, arbitrar, deci f este dezvoltabilă în seria Fourier pe $R-\{x\in R|x=2k\pi\}$:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx\right]=-\frac{1}{n}$$

deci

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$$

Înlocuind aici $x = \pi$ obţinem

$$a_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\ln 2, \text{ deci } f(x) = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

3. Să se dezvolte în serie numai de sinusuri pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia $f : [0, \pi] \to R$, dată prin:

$$f(x) = e^{ax} \quad (a = \text{const.})$$

Soluţie

$a_0 = 0, a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ax} \sin nx \, dx = \frac{2n\left[1 - (-1)^n e^{a\pi}\right]}{\pi(a^2 + n^2)},$$

deci pentru $x \in [0, \pi]$:

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - (-1)^n e^{a\pi}\right] \frac{n \sin nx}{a^2 + n^2}$$

4. Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \to R$,

$$f(x) = \sec x$$

Soluţie

Funcţia f(x) verifică condiţiile din criteriul lui Dirichlet-Jordan pe $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$; este o funcţie pară.

$$a_0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx = \frac{8}{\pi} \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

$$a_n = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \cos 4nx dx = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx =$$

$$= \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[2\cos(4n-1) - 2\cos(4n-3)x + \frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x}\right]dx =$$

$$= \frac{16}{x}\left[\frac{\sin(4n-1)\frac{\pi}{4}}{4n-1} - \frac{\sin(4n-3)\frac{\pi}{4}}{4n-3}\right] + a_{n-1}$$

Scriind toate relaţiile pentru n = 1, 2, …, n şi adunând-le obţinem

$$a_n = \frac{16}{\pi}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4} + \frac{8}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}),$$

deci

$$\sec x = \frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}) + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln(1+\sqrt{2}) + 2\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}\sin(2k+1)\frac{\pi}{4}\right]\cos 4nx$$

5. Fie $f : R \to R$,

$$f(x) = \frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{2}.$$

Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi, \pi]$.

Soluţie

Funcţia dată este continuă pe $[0,3]$ şi $f(0) = f(3) = 1$. Funcţia este monotonă pe [0, 1], [1, 2] şi [2, 3], deci este cu variaţie mărginită pe aceste intervale, deci şi pe [0, 3] , deci este dezvoltabilă în serie Fourier uniform convergentă pe acest interval.

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\left[\int_0^1 (x+1)dx + \int_1^2 2(2-x)dx + \int_2^3 (x-2)dx\right] = 2$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi}{3}x dx =$$
$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 (x+1)\cos\frac{2n\pi}{3}x dx + 2\int_1^2 (2-x)\cos\frac{2n\pi}{3}x dx + \int_2^3 (x-2)\cos\frac{2n\pi}{3}dx\right] =$$
$$= 4\sin n\pi \sin\frac{n\pi}{3} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2n\pi}{3}x dx = (-1)^{n+1}\frac{9\sin\frac{n\pi}{3}}{n^2\pi^2}$$

$b_n = 0$ dacă n = 3k, $k \in Z$.

$$f(x) = 2 + \frac{9}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\sin\frac{2n\pi}{3}x$$

7. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi, \pi]$ funcţiile:

$f(x) = \text{sh}\, ax$, $g(x) = \text{ch}\, ax$ ($a \neq$ întreg) şi să se deducă sumele seriilor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(a^2+n^2\right)^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(a^2+n^2\right)^2}$$

Soluţie

Funcţiile date îndeplinesc condiţiile lui Dirichlet. Pentru f(x) avem $a_0 = 0$, $a_n = 0$ (f este funcţie impară) şi :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\text{sh}\ ax\ \sin nx\ dx$$

Integrând de două ori prin părţi, obţinem:

$$b_n = \frac{2}{\pi(a^2+n^2)}\left[a\sin nx\cosh ax - n\cos nx\sinh ax\right]_0^{\pi} =$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{2n}{\pi\left(a^2+n^2\right)}\sinh a\pi,$$

deci

$$(x) = \frac{2}{\pi}\sinh ax \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{a^2+n^2}\sin nx, \quad |x| < \pi$$

Pentru g(x)avem $b_n = 0$ şi (g este o funcţie pară):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh ax dx = \frac{\sinh a\pi}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cosh ax \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\cosh ax \frac{\sinh nx}{n}\right]_0^{\pi} - \\ -\frac{2a}{n\pi}\int_0^{\pi}\sinh ax \sin nx dx = (-1)^n \frac{2a\sinh a\pi}{\pi\left(a^2+n^2\right)},$$

deci

$$g(x) = \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2a\sinh a\pi}{\pi}\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{a^2+n^n}, \; |x| \le \pi$$

Utilizând formula lui Parceval:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)dx$$

unde $f:[-l,l] \to R$ şi pătratul ei este o funcţie integrabilă:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2+n^2)^2} = \frac{\pi}{2\sinh^2 a\pi}\int_0^{\pi}\cosh^2 ax dx$$

şi

$$\frac{1}{4a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(a^2+n^2\right)} = \frac{\pi}{2\sinh^2 a\pi}\int_0^{x}\cosh^2 ax dx$$

Calculând integralele din membrii doi, avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(a^2+n^2\right)^2} = \frac{\pi}{8a\sinh^2 a\pi}\left(\sinh 2a\pi - 2a\pi\right)$$

$$\frac{1}{4a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{\left(a^2+n^2\right)^2}=\frac{\pi}{8a\sinh^2 a\pi}\left(\sinh 2a\pi+2a\pi\right)$$

Din (4) obţinem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(a^2+n^2\right)^2}=\frac{\pi a-1}{4a^2}+\frac{\pi\left\{(2a\pi+1)e^{2a\pi}-1\right\}}{2a^3(e^{2a\pi}-1)}$$

Aplicând de trei ori regula lui L'Hopital, obţinem:

$$\lim_{a\to\infty}\left\{\frac{\pi}{8\sinh^2 a\pi}\left[\sinh 2a\pi-2a\pi\right]\right\}=\frac{\pi^2}{6}$$

Ţinând seama că seria din membrul întâi al egalităţii este absolut convergentă, rezultă că putem trece la limită pentru $a\to\infty$ sub semnul sumă, astfel că deducem:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$